INDIPENDENZA LINEARE

<u>Def</u> $v_1, , v_m \in V$ sono LIN. INDIP.

se $\lambda_1 v_1 + \quad + \lambda_m v_m = 0$

se e solo se $\lambda_1 = \lambda_2 = \quad = \lambda_m = 0$

Altrimenti $v_1, , v_m$ si dicono LIN. DIPENDENTI.

<u>Prop</u> 3.2.4

I vettori $v_1, , v_m$ sono LIN DIPENDENTI

se e solo se almeno uno di essi è combinazione lineare degli altri.

Esempio

$$\underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}}, \underset{v_4}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad \text{in } \mathbb{R}^3$$

Lavorando un po' "a occhio"

$3 v_2$

$$3\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-3\\-3\end{pmatrix}$$

trovo

$$3\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-2\\-3\end{pmatrix}$$

cioè $\quad 3v_2 - v_1 = v_3$

$$-v_1 + 3v_2 - v_3 + 0 v_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad (*)$$

dunque v_1, v_2, v_3, v_4 NON SONO LIN. INDIPENDENTI, dunque sono LIN. DIPENDENTI

Anzi la relazione $(*)$ dice che anche solo v_1, v_2, v_3 sono lin. DIP.

$$-v_1 + 3v_2 - v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$v_1 = 3v_2 - v_3$$

$$-3v_2 = -v_1 - v_3$$

$$v_2 = \frac{1}{3}v_1 + \frac{1}{3}v_3$$

<u>Es</u> in $\mathbb{R}^n$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ t.c. } \sum_{i=1}^{n} a_i = 0 \right\}$$

W è un sottospazio vettoriale? SÌ

Infatti W è l'insieme delle soluzioni del "sistema"

$$\left\{ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \right.$$

è OMOGENEO

Capitolo 4 BASI E DIMENSIONE

Prop Sia $V = \langle v_1, \; , v_n \rangle$ sp. vett diverso da $\{0\}$. Allora esiste un sottoinsieme di $\{v_1, , v_n\}$ costituito da vettori lin INDIP e che generano ancora V.

Dim

PASSO 1

$$V = \langle v_1, \; , v_n \rangle$$

se $v_1, \; , v_n$ sono già LIN INDIP. OK

altrimenti sono lin DIP.

Per la Proposizione 3.2.4 uno di essi, diciamo, a meno di rinumerarli, v_n, è combinazione lineare degli altri

$$v_n = \alpha_1 v_1 + \quad + \alpha_{n-1} v_{n-1}$$

con gli α_i non tutti nulli

Allora $\langle v_1, v_n \rangle = \langle v_1, \; , v_{n-1} \rangle$ perché?

$\supseteq$ OVVIA

$\subseteq$

$$b_1 v_1 + \quad + b_{n-1} v_{n-1} + b_n v_n =$$

$$= b_1 v_1 + \quad + b_{n-1} v_{n-1} + b_n \left(a_1 v_1 + \quad + a_{n-1} v_{n-1} \right) =$$

per le proprietà distributive, commutative, etc...

$$= \left(b_1 + b_n a_1 \right) v_1 + \quad + \left(b_{n-1} + b_n a_{n-1} \right) v_{n-1}$$

dunque $\in \langle v_1, , v_{n-1} \rangle$

PASSO 2 dunque se siamo arrivati qui sappiamo

$$V = \langle v_1, , v_{n-1} \rangle$$

se $v_1, , v_{n-1}$ sono lin INDIP OK

se $v_1, , v_{n-1}$ sono lin DIP procedo come sopra e scopro che

$$V = \langle v_1, , v_{n-1} \rangle = \langle v_1, , v_{n-2} \rangle$$

e così VIA, DOPO al più $n-1$ passi trovo un sottoinsieme di $\{ v_1, , v_n \}$ con la proprietà richiesta.

<u>Def</u> Sia V sp. vettoriale.

Un insieme $\{v_1, \ , v_n\}$ si dice BASE di V se valgono entrambe:

① $v_1, \ , v_n$ sono lin. indip

② $v_1, \ , v_n$ generano V.

<u>Esempi</u> $\mathbb{R}[x]^{\leq 4}$ è lo spazio vett dei polinomi di grado ≤ 4. È un sottospazio di $\mathbb{R}[x]$.

Cerchiamo una base. Proposta:

$$1, x, x^2, x^3, x^4$$

① sono lin indip? Sì

$$\underbrace{\alpha \cdot 1 + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4}_{} = \underbrace{0}_{}$$

ciò accade se e solo se $\alpha=\beta=\gamma=\delta=\epsilon=0$

(2) generano $\mathbb{R}[x]^{\leq 4}$

sì, banalmente.

Quindi $1, x, x^2, x^3, x^4$ è una base di $\mathbb{R}[x]^{\leq 4}$

Proviamo a cercarne un'altra:

$x^2+1,\ x-1,\ x^3+x^2+1,\ x^4-1,\ x+1,\ x^2+x+1$

è una base?

$$\alpha_1(x^2+1)+\alpha_2(x-1)+\alpha_3(x^3+x^2+1)+\alpha_4(x^4-1)+$$
$$+\alpha_5(x+1)+\alpha_6(x^2+x+1)=0$$

grado per grado equivale a

$$\begin{cases} \alpha_4=0 \\ \alpha_3=0 \\ \alpha_1+\alpha_3+\alpha_6=0 \\ \alpha_2+\alpha_5+\alpha_6=0 \\ \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6=0 \end{cases}$$

Questo sistema si può riscrivere con le matrici

$$
\begin{array}{c}
x^4 \\ x^3 \\ x^2 \\ x \\ 1
\end{array}
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{pmatrix}
$$

C'è soluzione perché è omogeneo.

Riducendo a scalini, uno scalino lungo deve esserci. Dunque c'è (almeno) una variabile libera, dunque ci sono infinite soluzioni.

e i polinomi proposti non sono lin INDIP.

Infatti ho la relazione:

$$2(x^2+x+1) - 2(x^2+1) = (x+1)+(x-1)$$

Posso dunque "eliminare" uno qualunque di questi 4 polinomi (seguendo l'algoritmo della proposizione)

Eliminiamo x^2+x+1.

Allora vi chiedo

$x^2+1,\ x-1,\ x^3+x^2+1,\ x^4-1,\ x+1$

sono una base?

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Impostiamo il problema:

- sono lin indip. se e solo se questo sistema ha solo la sol $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- generano se e solo se il sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$$

ha soluzione per ogni $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

RISPONDIAMO:

Mettiamo a scalini la matrice INCOMPLETA

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

solo permutato le righe

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5 pivot in una matrice 5×5. Non ci sono scalini lunghi. La soluzione c'è ed è unica.

Dunque i cinque polinomi

x^2+1, $x-1$, x^2+x^2+1, x^4-1, $x+1$

sono una BASE di $\mathbb{R}[x]^{\leq 4}$